PRZYŚPIESZENIE DOŚRODKOWE

LESZEK W. GUŁA
Lublin - RZECZPOSPOLITA POLSKA

12 STYCZNIA 1997 — 26 KWIETNIA 2010

Najważniejszy przypadek ruchu krzywoliniowego stanowi ruch punktu po kole ze stałą prędkością v. Wtedy każdy punkt należący do koła, który jest różny i różnie oddalony od ustalonego początku (środka O koła) promienia wodzącego r czyli różnie oddalony od początku (wierzchołka kąta) ramienia drogi kątowej φ ma inną prędkość liniową (obwodową) v_x, inną, prędkość polową u_x i inne przyśpieszenie dośrodkowe (normalne) a_{nx} – tym większe, im większy jest promień r_x, lecz prędkość kątowa ω i **prędkość ilorazowa** (częstość obiegów, częstość kołowa) ν wszystkich punktów należących do koła nie ulegają zmianie. Droga liniowa s przebyta przez punkt umieszczony na tzw. końcowym ramieniu kąta, droga kątowa φ zakreślona przez promień wodzący r, **droga ilorazowa rzeczywista** n, pole S wycięte przez promień wodzący r oraz **iloczyn** $2\pi n v$ są wprost proporcjonalne do czasu t trwania ruchu, a mianowicie:

$$v \overset{\substack{def.\\const.}}{=} \frac{s}{t} \overset{\substack{def.\\const.}}{=} \frac{\pi d n}{t}, \quad \omega \overset{\substack{def.\\const.}}{=} \frac{\varphi}{t}, \quad \boxed{a_n \overset{\substack{def.\\const.}}{=} \frac{2\pi n v}{t},} \quad u \overset{\substack{def.\\const.}}{=} \frac{S}{t}, \quad \boxed{\nu \overset{\substack{def.\\const.}}{=} \frac{n}{t},}$$

przy czym $\pi \approx 3,1416$, a liczba $n \in \mathbb{R}^+$ i określa, jakim ułamkiem rzeczywistym bazowej wielkości – drogi liniowej $2\pi r$, drogi kątowej φ_b, czasu (okresu obiegu, 1 koła) T, drogi polowej πr^2 jest rozpatrywana wielkość rzeczywista s, φ, t, S – co wyrażają proporcje

$$\boxed{n \overset{def.}{=} \frac{s}{2\pi r} = \frac{\varphi}{\varphi_b} = \frac{t}{T} = \frac{S}{\pi r^2}\ ,}$$

gdzie $\varphi_b = 1$ obr $= 360^0 = 2\pi$ rad.

Jeżeli $v = v_1 = v_2$, $\measuredangle 1O2 = \varphi$, $r = |O1| = |O2|$, punkt 1 jest początkiem wektora $\overrightarrow{v}_1$ stycznego do okręgu (O, r) i zarazem początkiem rozpatrywanego ruchu oraz punkt 2 jest początkiem wektora $\overrightarrow{v}_2$ stycznego do tego okręgu, to po czasie t droga przebyta przez punkt jest równa długości łuku $s = |\widehat{12}|$, prostopadły do wektora $\overrightarrow{v}_2$ wektor $\overrightarrow{a}_n$ jest zaczepiony w punkcie 2 i $\overrightarrow{v}_1 \neq \overrightarrow{v}_2$, gdyż ich współrzędne są różne. Wzrost **iloczynu** $2\pi n v$ charakteryzuje **przyśpieszenie dośrodkowe** a_n, którego wektor $\overrightarrow{a}_n$ jest skierowany wzdłuż promienia do środka O koła. Rysujemy drugi okrąg (O_1, s). Budujemy $\measuredangle 2_1 O_1 1_1$ (około 45^0) i onaczamy przez ω tak, że punkt 2_1 jest początkiem wektora prędkości $\overrightarrow{v}$. Wektor $\overrightarrow{a}_n$ jest zawsze zaczepiony w początku prostopadłego do niego wektora $\overrightarrow{v}$, przeto tutaj będzie on styczny do okręgu (O_1, s). Okazuje się, że na kolejnych okręgach $(O_k, s\,(t))$ drugiego koła

$$|\widehat{2_k 1_k}| = 2\pi n v, \quad przy \quad k \in \mathbb{N}_2.$$

Hodografem toru punktu jest lina prosta $s = vt$, a wektor $\overrightarrow{a}_n$ jest reprezentantem **"uwalnianych" wektorów swobodnych** z prędkością v.

Z rysunku drugiego dostajemy zależność ogólną

$$\frac{2\pi n v}{2\pi v t} = \frac{\omega}{\varphi_b} \Longrightarrow \frac{a_n}{2\pi v} = \frac{\omega}{\varphi_b} \ .$$

Z powyższego następuje

$$\frac{vt}{2\pi r} = \frac{\varphi}{\varphi_b} = \frac{t}{T} = \frac{S}{\pi r^2} = n \Longrightarrow \frac{v}{2\pi r} = \frac{\omega}{\varphi_b} = \frac{1}{T} = \frac{u}{\pi r^2} = \frac{n}{t} = \nu \Rightarrow$$

wzór wielkościowy i równoważne mu wzory na prędkość liniową v mierzoną po okręgu koła

$$v = \frac{2\pi r n}{t} = \frac{2\pi r \omega}{\varphi_b} = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2u}{r} = 2\pi r \nu$$

oraz wzór wielkościowy i równoważne mu wzory na przyśpieszenie dośrodkowe (normalne)

$$a_n = \frac{2\pi v n}{t} = \frac{2\pi v \omega}{\varphi_b} = \frac{v^2}{r} = \frac{2\pi v}{T} = \frac{2vu}{r^2} = 2\pi v \nu.$$

W układzie SI wymiary wielkości ν i ω wynoszą:

$$[\nu] = 1 \cdot \mathrm{s}^{-1} \quad \text{i} \quad [\omega] = \mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

Jeżeli

$\omega = \dfrac{n\varphi_b}{t}$ i $t = 1\mathrm{min}$, to $\omega = n\dfrac{\mathrm{obr}}{\mathrm{min}}$ i $\nu = n\dfrac{1}{\mathrm{min}}$, bo ω, n, ν **są parami różne**.

Jeżeli

$$\omega = \frac{n\varphi_b}{t} \ \text{ i } \ t = 1\mathrm{s}, \ \text{ to } \ \omega = 2\pi n\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \ \text{ i } \ \nu = n\frac{1}{\mathrm{s}}, \ \text{ bo } \ \omega \neq n \neq \nu \neq \omega.$$

W ruchu zmiennym po okręgu koła zmieniają się v i ω oraz ν, przeto otrzymujemy **przyśpieszenie ilorazowe** (częstościowe obiegów)

$$a_i \overset{def}{=} \frac{\nu - \nu_0}{t} = \frac{v - v_0}{2\pi r t} = \frac{\omega - \omega_0}{\varphi_b t} \Longrightarrow a_i = \frac{a_t}{2\pi r} = \frac{\varepsilon}{\varphi_b},$$

gdzie ε - przyśpieszenie kątowe; a_t - przyśpieszenie styczne.

Kilka przykładów wykaże wagę powyższego opracowania dla dzieci.

1. " Sprawdź prawidłowość wzoru liczbowego na prędkość liniową υ wyrażoną (zadaną) w m/s w ruchu jednostajnym obrotowym [HELIODOR CHMIELEWSKI: MIĘDZYNARODOWY UKŁAD JEDNOSTEK MIAR, WYDAWNICTWA SZKOLNE I PEDAGOGICZNE 1979, Zakłady Graficzne w Katowicach] = [1]

$$\upsilon = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{1000 \cdot 60} \ ,$$

gdzie: d – średnica obracającego się ciała, wyrażona w milimetrach – mm,
n – liczba obrotów na minutę (prędkość obrotowa)."

W [1] mamy:" Wzór wielkościowy na prędkość liniową brzmi

$$\upsilon = \frac{s}{t} = \frac{\pi \cdot d}{t} = \pi \cdot d \cdot n \text{ "} \in \mathbf{0},$$

czyli należy do zbioru zdań fałszywych, gdyż na prędkość liniową prawdziwe są następujące wzory wielkościowe

$$\upsilon = \frac{s}{t} = \frac{\pi d \omega}{\varphi_b} = \frac{\pi d n}{t} = \pi d \nu,$$

gdzie n jest **drogą liczbową rzeczywistą**.

Ponadto prędkością obrotową nazywamy prędkość kątową ω wyrażoną w obr/min, bo obrót jest kątem. Mamy:

$$\omega = \nu \varphi_b = \frac{n}{t} \varphi_b = \frac{\varphi}{\varphi_b \cdot t} \varphi_b = \omega.$$

Przyjmujemy, że czas trwania ruchu wynosi $t = 1\,[\mathrm{min}]$. Skoro υ zadana jest w $[\mathrm{m/s}]$, to wymiary wielkości d i ω, t wyraźmy odpowiednio w metrach, rad/s i w sekundach, a mianowicie

$$\upsilon = \frac{\pi d \omega}{\varphi_b} \implies \upsilon \cdot [\mathrm{m/s}] = \frac{\dfrac{\pi \cdot d}{1000}\,[\mathrm{m}] \cdot \dfrac{2\pi n}{60}\,[\mathrm{rad/s}]}{2\pi\,[\mathrm{rad}]} \implies \upsilon = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{1000 \cdot 60}$$

i

$$\upsilon = \frac{\pi d n}{t} \implies \upsilon \cdot [\mathrm{m/s}] = \frac{\dfrac{\pi \cdot d}{1000}\,[\mathrm{m}] \cdot n}{60\,[\mathrm{s}]} \implies \upsilon = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{1000 \cdot 60}$$

i

$$\upsilon = \pi d \nu \implies \upsilon \cdot [\mathrm{m/s}] = \frac{\pi \cdot d}{1000}\,[\mathrm{m}] \cdot \frac{n}{60}\,[1/\mathrm{s}] \implies \upsilon = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{1000 \cdot 60}.$$

1 – jaśniej: " Sprawdź prawidłowość wzoru liczbowego na prędkość liniową wyrażoną (zadaną) w m/s w ruchu jednostajnym obrotowym:

$$\upsilon = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{1000 \cdot 60} \ ,$$

gdzie: d – średnica obracającego się ciała, wyrażona w mm, bez miana ";

n – droga liczbowa z prędkości kątowej ω obracającego się ciała w [obr/min].

Chodzi o prędkość, więc piszemy

$$\upsilon = \frac{s}{t} = \frac{n \cdot \pi d}{t} = \frac{\dfrac{\varphi}{\varphi_b} \cdot \pi d}{t} = \frac{\omega \cdot \pi \cdot d}{\varphi_b}.$$

Mamy

$$\upsilon \cdot [\mathrm{m/s}] = \frac{\omega \cdot [\mathrm{obr/min}] \cdot \pi \cdot d \cdot [\mathrm{mm}]}{1\mathrm{obr}},$$

a ponieważ 1min = 60s i 1mm = (1/1000) m, to

$$\upsilon = \frac{\omega \cdot \pi \cdot d}{60 \cdot 1000}.$$

2. Nie jest precyzyjny poniższy wzór wielkościowy

$$\upsilon = \omega r.$$

DOWÓD.

$$\frac{\widehat{|AB|}}{r} = \frac{\pi\varphi}{180^0} = 1 \Rightarrow \left[\ \varphi = 1\mathrm{rad} \quad \wedge \quad \frac{\pi\,(1\mathrm{rad})}{180^0} = 1 \ \right] \Rightarrow$$

$$1\mathrm{rad} \ = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0 \approx \left(\frac{180}{3,1416}\right)^0 \approx 57,2956^0 \approx 57^0{+}0,2956{\cdot}60^/ \approx 57^0{+}17,736^/ \approx$$

$$57^0 17^/ + 0,736 \cdot 60^{//} \approx 57^0 17^/ 44^{//}.$$

$$\frac{\widehat{|AA|}}{r} = \frac{s}{r} = \boxed{\frac{2\pi r}{r}} = \frac{\pi\varphi}{180^0} = \boxed{2\pi} \Rightarrow \left[\ \varphi = 2\pi\mathrm{rad} \quad \wedge \quad \frac{\pi\,(2\pi\mathrm{rad})}{180^0} = 2\pi \ \right] \Rightarrow$$

$$2\pi\mathrm{rad} \ = 360^0.$$

Dlatego

$$\upsilon = \frac{s}{t} = \frac{n2\pi r}{t} = \frac{2\pi r\varphi}{t\varphi_b} = \frac{2\pi r\omega}{\varphi_b} \Longrightarrow \upsilon = \frac{\omega r}{\mathrm{rad}}.$$