

## ZADANIA

- Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$  prawdziwa jest nierówność:  
a)  $9a^2 + 4b^2 \geq 12ab$ ,    b)  $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{9}b^2 \geq \frac{1}{3}ab$ ,    c)  $a(\sqrt{6b} - a) \leq \frac{3}{2}b^2$ .
- Wykaż, że dla dowolnych liczb nieujemnych  $a$  i  $b$  prawdziwa jest nierówność:  
a)  $a + 4b \geq 4\sqrt{ab}$ ,    b)  $a + \frac{b}{2} \geq \sqrt{2ab}$ ,    c)  $\sqrt{a}(\frac{1}{2}\sqrt{b} - \sqrt{a}) \leq \frac{b}{16}$ .
- Przeczytaj podany w ramce przykład.

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich  $a$  i  $b$  takich, że  $ab = 4$ , prawdziwa jest nierówność  $a + b \geq 4$ .

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} && \text{Korzystamy z zależności między} \\ a+b &\geq 2\sqrt{ab} && \text{średnią arytmetyczną i średnią} \\ (a+b)^2 &\geq 4ab && \text{geometryczną liczb} \end{aligned}$$

Z założenia  $ab = 4$ , więc  $(a+b)^2 \geq 16$  i stąd  $a+b \geq 4$ .

- Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich  $a$  i  $b$  takich, że  $ab = 9$ , prawdziwa jest nierówność  $a + b \geq 6$ .
- Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich  $a$  i  $b$  takich, że:  
a)  $a + b = \frac{1}{2}$ , prawdziwa jest nierówność  $ab \leq \frac{1}{16}$ ,  
b)  $a + b = 5$ , prawdziwa jest nierówność  $ab \leq 6,25$ .
  - Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich  $a$  i  $b$  takich, że:  
a)  $ab = 16$ , prawdziwa jest nierówność  $(1+a)(1+b) \geq 25$ ,  
b)  $ab = \frac{1}{4}$ , prawdziwa jest nierówność  $4(1+a)(1+b) \geq 9$ .
  - Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$  takich, że  $a \geq b > 0$ , prawdziwa jest nierówność  $b^2(a+1) \leq a^2(b+1)$ .

## POWTÓRZENIE

- Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$  prawdziwa jest nierówność:  
a)  $2b(2a-b) \leq (2a-b)(2a+b)$ ,    b)  $\sqrt{3}b(a-\sqrt{3}b) \leq a(a-\sqrt{3}b)$ .
- Udowodnij, że dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x \in (-1; 1)$  prawdziwa jest nierówność  $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} \leq 2$ .

## 4.3.

Ćwiczenie  
Udowodnij

Przedstaw  
wodniar  
skorzysta

Ćwiczenie  
Udowodnij  
równoległość

Ćwiczenie  
Udowodnij  
z jego pomocą

W dowodzie  
dzeń

Przykład

W trójkącie  
dono  
 $|AB| =$   
to  $|AC| =$

$|AB| =$   
więc na  
przystają

Z powyższego  
 $|AB| =$   
trójkąty  
Zatem

Ćwiczenie  
Środkowa  
mają równość  
a)  $|AB| =$   
b)  $\nabla CAD$