ZADANIA

1. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność:

a) $9a^2 + 4b^2 \geqslant 12ab$, b) $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{9}b^2 \geqslant \frac{1}{3}ab$, c) $a(\sqrt{6}b - a) \leqslant \frac{3}{2}b^2$.

2. Wykaż, że dla dowolnych liczb nieujemnych a i b prawdziwa jest nierówność:

a) $a + 4b \geqslant 4\sqrt{ab}$, b) $a + \frac{b}{2} \geqslant \sqrt{2ab}$, c) $\sqrt{a}(\frac{1}{2}\sqrt{b} - \sqrt{a}) \leqslant \frac{b}{16}$.

3. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b takich, że $ab = 4$, prawdziwa jest nierówność $a + b \geqslant 4$.
>
> $$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$
> $$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$$
> $$(a+b)^2 \geqslant 4ab$$
>
> Korzystamy z zależności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną liczb
>
> Z założenia $ab = 4$, więc $(a+b)^2 \geqslant 16$ i stąd $a + b \geqslant 4$.

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b takich, że $ab = 9$, prawdziwa jest nierówność $a + b \geqslant 6$.

4. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b takich, że:

a) $a + b = \frac{1}{2}$, prawdziwa jest nierówność $ab \leqslant \frac{1}{16}$,

b) $a + b = 5$, prawdziwa jest nierówność $ab \leqslant 6{,}25$.

5. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b takich, że:

a) $ab = 16$, prawdziwa jest nierówność $(1 + a)(1 + b) \geqslant 25$,

b) $ab = \frac{1}{4}$, prawdziwa jest nierówność $4(1 + a)(1 + b) \geqslant 9$.

6. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b takich, że $a \geqslant b > 0$, prawdziwa jest nierówność $b^2(a + 1) \leqslant a^2(b + 1)$.

POWTÓRZENIE

1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność:

a) $2b(2a - b) \leqslant (2a - b)(2a + b)$, b) $\sqrt{3}b(a - \sqrt{3}b) \leqslant a(a - \sqrt{3}b)$.

2. Udowodnij, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in \langle -1; 1 \rangle$ prawdziwa jest nierówność $\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x} \leqslant 2$.