ZADANIA DOMOWE PRZED 1. KOLOKWIUM NA ST. ZAOCZNYCH

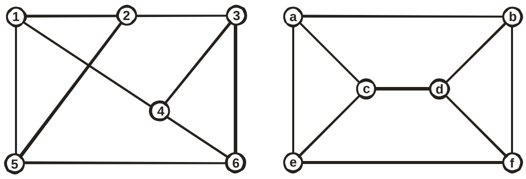
Zadanie 1
Skonstruuj graf (nieskierowany) o 4 wierzchołkach, który jest izomorficzny ze swoim dopełnieniem. Udowodnij izomorfizm tej pary grafów. Narysuj i opisz macierzami incydencji oba grafy. Znajdź związek pomiędzy wyznaczonymi macierzami incydencji.

Zadanie 2
Skonstruuj graf (nieskierowany) o 5 wierzchołkach, który jest izomorficzny ze swoim dopełnieniem. Udowodnij izomorfizm tej pary grafów. Narysuj i opisz macierzami incydencji oba grafy. Znajdź związek pomiędzy wyznaczonymi macierzami incydencji.

Zadanie 3
Skonstruuj graf (nieskierowany) o 4 wierzchołkach, który jest izomorficzny ze swoim grafem krawędziowym. Udowodnij izomorfizm tej pary grafów. Narysuj i opisz macierzami sąsiedztwa oba grafy. Znajdź związek pomiędzy wyznaczonymi macierzami sąsiedztwa.

Zadanie 4
Skonstruuj graf (nieskierowany) o 5 wierzchołkach, który jest izomorficzny ze swoim grafem krawędziowym. Udowodnij izomorfizm tej pary grafów. Narysuj i opisz macierzami sąsiedztwa oba grafy. Znajdź związek pomiędzy wyznaczonymi macierzami sąsiedztwa.

Zadanie 5
Zbadaj czy dwa pokazane na rysunku grafy są izomorficzne. Odpowiedź w pełni uzasadnij.



Zadanie 6
Dla grafu skierowanego
$(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 2), (3, 5), (4, 1), (4, 3), (5, 3), (5, 4)\})$
utwórz graf pochodny. Dla obu grafów wyznacz macierze incydencji i sąsiedztwa oraz stopnie wierzchołków. W obu grafach wyznacz stopnie wierzchołków względem zbioru $\{1, 3, 4\}$.

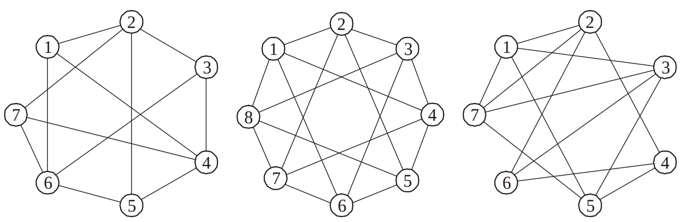
Zadanie 7
Narysuj graf relacji binarnej P na zbiorze $V = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ zdefiniowanej następująco: $i\ P\ j$ dla $i, j \in V \Leftrightarrow \text{NWD}(i, j) = 1$ (NWD oznacza największy wspólny dzielnik). Graf pochodny dla tego grafu opisz macierzami incydencji i sąsiedztwa. Wyznacz stopnie wierzchołków w grafie relacji i jego grafie pochodnym. Wyznacz także stopnie wierzchołków względem zbioru liczb pierwszych zawartych w V.

Zadanie 8
Dla których z wymienionych liczb krawędzi: 30, 36, 42, 48, istnieje graf spójny o 10 wierzchołkach?

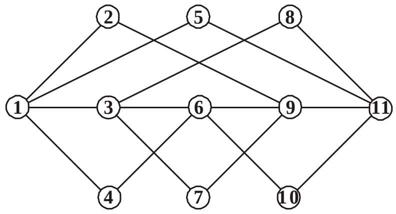
Zadanie 9
Rozważmy graf o 9 wierzchołkach, w którym suma stopni wierzchołków wynosi 28.
Czy jego dopełnienie może mieć 3 składowe spójne? Odpowiedź dokładnie uzasadnij bez rysowania grafu.

Zadanie 10
Narysuj graf o 9 wierzchołkach i 4 składowych spójnych, który ma:
a) 5 krawędzi,
b) 15 krawędzi.

Zadanie 11
W podanych grafach wyznacz metodami przeglądu grafu wszerz i przeglądu w głąb ciągi wierzchołków, które zaczynają się od wierzchołka:
a) 1, b) 4, c) 7.



Zadanie 12
Posługując się tw. Kuratowskiego wykaż, czy graf o podanym rysunku jest, czy nie jest planarny.



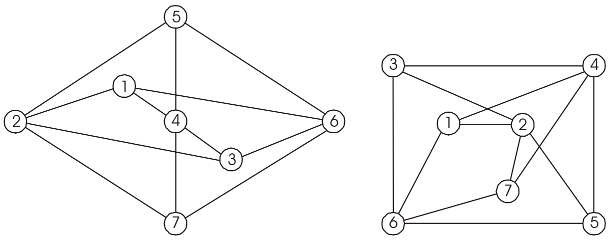
Zadanie 13
Czy wśród grafów o 5 wierzchołkach i 9 krawędziach są grafy nieplanarne?
Odpowiedź uzasadnij w oparciu o tw. Kuratowskiego.

Zadanie 14
Graf ma *n* wierzchołków i *m* krawędzi.
W którym z podanych przypadków wykluczona jest planarność grafu?

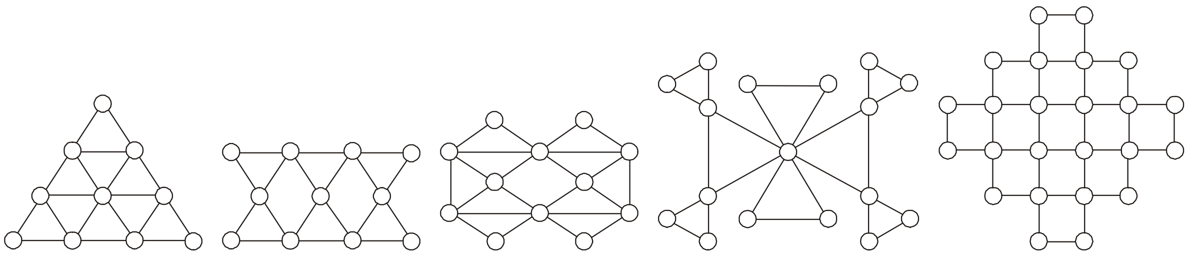
a) $n = 4$ i $m = 6$,
b) $n = 5$ i $m = 8$,
c) $n = 6$ i $m = 13$,
d) $n = 7$ i $m = 14$,
e) $n = 8$ i $m = 19$.

Odpowiedź uzasadnij w oparciu o warunek konieczny wynikający z wzoru Eulera.

Zadanie 15
Rozstrzygnij z uzasadnieniem, czy podane grafy są dwudzielne:



Zadanie 16
Rozstrzygnij z uzasadnieniem, czy grafy o podanych rysunkach są Eulerowskie:



Jeśli są, to w każdym z nich wyznacz drogę (cykl) Eulera za pomocą algorytmu Fleury'ego.

Zadanie 17
Czy po dodaniu do pierwszego z grafów podanych w zadaniu 16.:

a) 1, b) 2, c) 3,

krawędzi można uzyskać graf, w którym będzie istniała droga Eulera? Odpowiedź zilustruj na rysunku!

Zadanie 18
Czy graf pochodny dla dowolnego Eulerowskiego grafu skierowanego jest zawsze Eulerowski? Odpowiedź uzasadnij!

Zadanie 19
Czy graf krawędziowy dla grafu Eulerowskiego jest zawsze Eulerowski? Odpowiedź uzasadnij!

Zadanie 20
W grafach z zadania 16. zamień każdą krawędź na łuk tak, aby powstały z nich Eulerowskie grafy skierowane.

Zadanie 21
W podanych grafach sprawdź niezależnie, które z omawianych na wykładzie i na ćwiczeniach warunków dostatecznych istnienia cyklu Hamiltona dla grafów nieskierowanych (Diraca, Ore, na liczbę krawędzi i Chvátala) są spełnione, a które nie: