Logarytmy

Ćwiczenie A. Znajdź liczby oznaczone literami.

$$2^a = 16 \qquad 3^b = 27 \qquad 4^c = 2 \qquad 125^d = 5 \qquad 7^e = \tfrac{1}{49} \qquad 10^f = 0{,}001$$

Rozważmy następujące pytania: Do jakiej potęgi należy podnieść liczbę 2, aby otrzymać 32? Do jakiej potęgi należy podnieść liczbę 2, aby otrzymać 30?

Pytania te można przedstawić za pomocą równań:

$$2^x = 32 \qquad\qquad 2^x = 30$$

Łatwo stwierdzić, że rozwiązaniem pierwszego z tych równań jest liczba 5, ponieważ $2^5 = 32$. Natomiast nie jest łatwo ustalić, jaka liczba spełnia drugie z tych równań. Liczbę spełniającą równanie $2^x = 30$ nazywamy logarytmem liczby 30 przy podstawie 2 i oznaczamy symbolem $\log_2 30$. Liczba ta wynosi około 4,91.

Podobnie liczbę spełniającą równanie $2^x = 32$ nazywamy logarytmem liczby 32 przy podstawie 2 i oznaczamy $\log_2 32$. Zatem:

$$\log_2 32 = 5 \qquad\qquad \log_2 30 \approx 4{,}91$$

Niech a i b oznaczają liczby dodatnie i $a \neq 1$. Logarytmem liczby b przy podstawie a nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść a, aby otrzymać liczbę b.

Dla $a > 0$ i $a \neq 0$ i $b > 0$: $\boldsymbol{\log_a b = x \iff a^x = b}$

liczba logarytmowana

$$\log_a b$$

podstawa logarytmu

Na przykład:

$\log_3 81 = 4$, bo $3^4 = 81$

$\log_{10} 0{,}001 = -3$, bo $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0{,}001$

$\log_8 2 = \frac{1}{3}$, bo $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

$\log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} = -1$, bo $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$

$\log_7 7 = 1$, bo $7^1 = 7$

$\log_5 1 = 0$, bo $5^0 = 1$

Ćwiczenie B. Oblicz:

a) $\log_2 4$, $\log_{10} 10000$, $\log_9 3$, $\log_7 \frac{1}{7}$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$, $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}$

b) $\log_6 6$, $\log_{\frac{2}{3}} 1$, $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4}$, $\log_8 1$, $\log_5 5^4$, $\log_3 3^{12}$

Zauważ, że z definicji logarytmu dla $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz $b > 0$ wynikają następujące równości:

$$\boldsymbol{\log_a 1 = 0} \qquad\qquad \boldsymbol{\log_a a = 1} \qquad\qquad \boldsymbol{\log_a a^b = b}$$

w suplemencie do starszych wydań strona XIII

przykład

→ Oblicz $\log_{\sqrt{2}} 8$.

$\log_{\sqrt{2}} 8 = x$ — szukaną liczbę oznaczamy literą x

$\left(\sqrt{2}\right)^x = 8$ — $\log_a b = x \iff a^x = b$

$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x = 2^3$

$2^{\frac{1}{2}x} = 2^3$ — jeśli $a^b = a^c$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, to $b = c$

$\frac{1}{2}x = 3$

$\underline{x = 6}$

z historii

Na pomysł wprowadzenia logarytmów jako pierwszy wpadł Szkot John Napier. Swoje rozważania opublikował w 1614 r. w książce „Opisanie cudownych zasad logarytmów". Logarytmy Napiera różniły się nieco od tych, którymi posługujemy się dzisiaj, ale stanowiły tak ogromny postęp w metodach rachunkowych, że od razu wzbudziły ogromny entuzjazm.

Zastosowanie logarytmów do obliczeń astronomicznych pozwoliło J. Keplerowi odkryć prawa dotyczące ruchu planet.

Żyjący 150 lat później uczony francuski Pierre Laplace twierdził nawet, że „wynalazek logarytmów (...) podwaja życie astronomom".

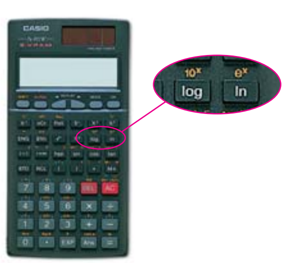
Nazwę „logarytm" wprowadził sam Napier. Powstała ona z greckich słów *logos* — myślenie i *arithmos* — liczenie.

Właściwie nie wiadomo, jak naprawdę brzmiało jego nazwisko (być może Neper lub Naper). Wiadomo jednak, że John Napier był szkockim baronem, a matematyka była tylko jego hobby.

Dla logarytmów przy podstawie 10 wprowadzono szczególne oznaczenie i nazwę.

Logarytm przy podstawie 10 nazywamy logarytmem dziesiętnym i zamiast pisać $\log_{10} b$, możemy pisać $\log b$.

$\log b$ oznacza to samo co $\log_{10} b$



Logarytmy dziesiętne można łatwo obliczać, gdy mamy do dyspozycji odpowiedni kalkulator. Służy do tego klawisz z napisem *log*.

Ćwiczenie C. Oblicz za pomocą kalkulatora:

$\log 6 \qquad \log 89 \qquad \log 0{,}2 \qquad \log 1500$

w suplemencie do starszych wydań strona XIV

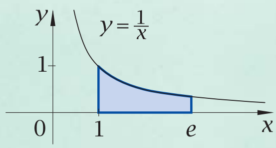
ciekawostka...

Oprócz klawisza *log* służącego do obliczania logarytmów dziesiętnych, na kalkulatorach znaleźć też można klawisz *ln*. Służy on do obliczania tzw. logarytmów naturalnych, to znaczy takich, których podstawą jest pewna liczba, nazywana liczbą e. Liczba ta ma szczególne znaczenie. Pojawia się we wzorach i zależnościach w wielu różnych działach matematyki. Liczba e jest niewymierna, poniżej zapisano kilkanaście cyfr jej rozwinięcia dziesiętnego.

$$e = 2{,}7182818284904\ldots$$

Oto przykłady tylko niektórych wzorów i zależności ze współczesnej matematyki, w których pojawia się liczba e:

→ Pole obszaru zacieniowanego na rysunku poniżej jest równe 1.



→ $e = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$

→ Niech p_n (dla $n \geqslant 2$) oznacza iloczyn wszystkich liczb pierwszych mniejszych lub równych n (czyli $p_2 = 2$, $p_3 = 2\cdot 3$, $p_4 = 2\cdot 3$, $p_5 = 2\cdot 3\cdot 5\ldots$). Wówczas wyrazy ciągu $\sqrt[n]{p_n}$ to coraz dokładniejsze przybliżenia liczby e.

→ $e = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{5}{5 + \ldots}}}}$

Liczbę e wprowadził do matematyki w XVIII wieku szwajcarski matematyk Leonard Euler (czyt. Ojler). Zauważył on, że kolejne wyrazy ciągu liczb: $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$, $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3$, $\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4$, … zbliżają się do pewnej liczby, którą nazwał liczbą e.

Ciąg $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pojawił się po raz pierwszy przy okazji rozważań dotyczących procentu składanego, prowadzonych w 1683 roku przez szwajcarskiego matematyka Jakuba Bernoulliego.

Załóżmy, że kwotę 1 zł wpłacamy na lokatę, której oprocentowanie wynosi $p\%$ w stosunku rocznym. Wówczas stan konta po roku zależy od tego, jak często kapitalizowane są odsetki.

Stan konta po roku	Jak często kapitalizowane są odsetki
$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^1$	1 raz dolicza się odsetki (po roku)
$\left(1 + \frac{p}{2\cdot 100}\right)^2$	2 razy dolicza się odsetki (co pół roku)
$\left(1 + \frac{p}{12\cdot 100}\right)^{12}$	12 razy dolicza się odsetki (co miesiąc)
$\left(1 + \frac{p}{n\cdot 100}\right)^n$	n razy w roku dolicza się odsetki

Gdy przyjmiemy, że oprocentowanie jest równe 100%, to stan konta po roku przy n okresach doliczania odsetek będzie wynosił $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Ponieważ wyrazy ciągu $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ nigdy nie przekraczają liczby $e \approx 2{,}72$, więc nawet gdyby odsetki doliczane były co ułamek sekundy, to stan konta po roku nigdy nie przekroczy 2,72 zł.

w suplemencie do starszych wydań strona XV

zadania

1. Zapisz za pomocą logarytmu liczby a, b, c i d:

$$5^a = 10 \qquad \left(\tfrac{1}{4}\right)^b = 7 \qquad 0{,}02^c = \tfrac{2}{3} \qquad 10^d = 0{,}6$$

2. Zastąp podaną równość odpowiednią równością typu $a^b = c$.

$$\log_8 4 = \tfrac{2}{3} \qquad \log_7 1 = 0 \qquad \log_5 \tfrac{1}{125} = -3 \qquad \log\sqrt{10} = \tfrac{1}{2}$$

3. Zastąp podaną równość odpowiednią równością typu $\log_a b = c$.

$$3^5 = 243 \qquad 6^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{6}} \qquad 10^0 = 1 \qquad \left(\tfrac{2}{3}\right)^{-3} = \tfrac{27}{8}$$

4. Znajdź x:

a) $\log_2 x = 4$

b) $\log_{\frac{1}{2}} x = 5$

c) $\log_{16} x = \frac{1}{4}$

d) $\log_{\frac{2}{5}} x = -1$

e) $\log_2 x = -5$

f) $\log_{\sqrt{3}} x = \frac{1}{2}$

g) $\log x = 1$

h) $\log x = -2$

i) $\log x = \frac{1}{3}$

5. Znajdź x:

a) $\log_x 125 = 3$

b) $\log_x 10000 = 2$

c) $\log_x \sqrt{2} = 1$

d) $\log_x 3 = \frac{1}{2}$

e) $\log_x 3^9 = 3$

f) $\log_x 7 = -\frac{1}{2}$

g) $\log_x 5 = -2$

h) $\log_x 0{,}0001 = -8$

i) $\log_x 0{,}5 = -\frac{1}{2}$

6. Znajdź liczby a, b i c spełniające warunki:

a) $\log_5 a = 3$
$\log_{\frac{2}{5}} \frac{5}{2} = b$
$\log_c 16 = 4$

b) $\log_{\frac{1}{9}} a = \frac{1}{2}$
$\log_7 \sqrt[3]{7} = b$
$\log_c 100 = -2$

c) $\log_{\sqrt{3}} a = -4$
$\log_{0,1} \sqrt{10} = b$
$\log_c 3 = \frac{1}{4}$

7. Oblicz:

a) $\log_2 16$
$\log_{\frac{1}{3}} 3$
$\log_4 2$
$\log_{0,3} 0{,}027$
$\log_{0,1} 100$

b) $\log_5 5$
$\log_7 1$
$\log_5 5^3$
$\log_8 8^{\frac{1}{3}}$
$\log_{\frac{3}{4}} \frac{3}{4}$

c) $\log 10$
$\log 0{,}1$
$\log 10^5$
$\log 1000$
$\log \sqrt{10}$

d) $\log_3 \sqrt{3}$
$\log_{\frac{1}{2}} 2$
$\log_{\frac{1}{3}} 9$
$\log_5 \sqrt[4]{5}$
$\log_6 \frac{1}{36}$

8. Oblicz:

a) $\log_{0,1} 100$ $\quad \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \log_{\frac{1}{2}} 4$ $\quad \log_9 \frac{1}{3}$ $\quad \log_5 \frac{1}{125}$ $\quad \log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4}$

b) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[4]{5}$ $\quad \log_{1,5} \frac{4}{9}$ $\quad \log_{\frac{2}{3}} \sqrt{1,5}$ $\quad \log_4 \sqrt[3]{2}$ $\quad \log_{0,25} 8$ $\quad \log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt{3}$

c) $\log_{\sqrt{5}} 5$ $\quad \log_{\sqrt{3}} 27$ $\quad \log_{\sqrt{2}} 4\sqrt{2}$ $\quad \log_{\sqrt[3]{6}} 6$ $\quad \log_{\sqrt[3]{10}} \sqrt{10}$ $\quad \log_{\sqrt{7}} \sqrt[3]{49}$

9. Przedstaw liczbę l jako logarytm pewnej liczby przy podstawie p.

a) $l = 4, \quad p = 3$

b) $l = 3, \quad p = 2$

c) $l = 5, \quad p = \frac{1}{2}$

d) $l = 1, \quad p = 7$

e) $l = 0, \quad p = \frac{3}{4}$

f) $l = -2, \quad p = 6$

g) $l = -4, \quad p = 0,1$

h) $l = \frac{1}{2}, \quad p = 10$

i) $l = -\frac{2}{3}, \quad p = 2$

j) $l = -\frac{1}{3}, \quad p = \frac{1}{2}$

10. Oblicz:

a) $\log_5 5^{-\frac{2}{7}}$ $\quad \log_5 (5^3)^7$ $\quad \log_5 \left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{-6}$ $\quad \log_5 (5^{-4})^{\frac{1}{5}}$

b) $\log_6 (6^{15})^{-4}$ $\quad \log_6 \frac{1}{36}$ $\quad \log_6 (\sqrt[3]{6})^2$ $\quad \log_6 \frac{1}{\sqrt[5]{36}}$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 2^{-4}$ $\quad \log_{\frac{1}{2}} \left((0,5)^7\right)^8$ $\quad \log_{\frac{1}{2}} 4^{13}$ $\quad \log_{\frac{1}{2}} (\sqrt{2})^{18}$

11. Dla każdego z podanych wyrażeń zapisz warunki, jakie muszą spełniać zgodnie z definicją logarytmu liczby a, b, c i d, i oblicz wartość tego wyrażenia.

a) $\log_a a^{23}$ $\quad \log_a a^{\sqrt{2}}$ $\quad \log_a \sqrt[5]{a^2}$ $\quad \log_a \frac{1}{a^7}$ $\quad \log_a \frac{a^3}{\sqrt{a}}$

b) $\log_b b$ $\quad \log_{b^2} b$ $\quad \log_{\sqrt{b}} b$ $\quad \log_{\frac{1}{b}} b$ $\quad \log_{\frac{1}{\sqrt[3]{b}}} b$

c) $\log_{c^2} c^4$ $\quad \log_{c^3} c^5$ $\quad \log_{\sqrt{c}} c^2$ $\quad \log_{\frac{1}{c}} c^3$ $\quad \log_{\frac{1}{c^2}} c^{10}$

d) $\log_{d^2} \sqrt{d}$ $\quad \log_{d^5} \frac{1}{d}$ $\quad \log_{\sqrt[3]{d}} \sqrt[5]{d}$ $\quad \log_{\frac{1}{d}} \frac{d}{\sqrt{d}}$ $\quad \log_{\frac{1}{\sqrt{d}}} d^{\frac{3}{4}}$

12. Wyznacz z podanego wzoru wskazaną wielkość.

a) $a = p^k, \quad k$

b) $P = Ma^t, \quad t$

c) $3 + v^a = T, \quad a$

d) $D = \log_5(m+1), \quad m$

e) $M = m - \log_2 r, \quad r$

f) $v = w \log(ab), \quad a$

w suplemencie do starszych wydań strona XVII